T^le^/SUP

# Mathématiques
## de la Terminale à la Sup

- **90** fiches-méthodes
- **333** exercices corrigés
- Formulaire

Abdelaziz **El Kaabouchi**

ellipses

# Chapitre 1

# Calcul matriciel

## 1.1 Comment effectuer une somme de matrices ?

Pour pouvoir effectuer la somme de deux matrices $A$ et $B$, il faut d'abord que les deux matrices aient la même taille. C'est-à-dire : même nombre de lignes et même nombre de colonnes. Si $C$ désigne la matrice somme, les éléments de la matrice $C$ sont obtenus comme suit :

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

**E X E M P L E**

**Effectuons la somme des matrices $A$ et $B$ suivantes :**

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{pmatrix}$$

On a

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d+d' & e+e' & f+f' \end{pmatrix}$$

**Exercices**

Dans chacun des cas suivants, trouver (quand c'est possible) la somme des matrices $A$ et $B$ suivantes.

1) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $\qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$ ;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 4 & 11 & -7 \end{pmatrix}$, $\qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 2 & -5 & 8 \\ x & 13y & z \end{pmatrix}$ ;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$, $\qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 8 \\ x & z \end{pmatrix}$ ;

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$, $\qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 2 & -5 & 8 \\ x & y & z \end{pmatrix}$.

## 1.2 Comment effectuer une combinaison linéaire de matrices ?

Pour pouvoir effectuer une combinaison linéaire de deux matrices $A$ et $B$, il faut d'abord que les deux matrices aient la même taille. C'est-à-dire : même nombre de lignes et même nombre de colonnes. Si $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels et $C$ désigne la matrice combinaison linéaire $\alpha A + \beta B$, les éléments de la matrice $C$ sont obtenus comme suit :

$$c_{i,j} = \alpha a_{i,j} + \beta b_{i,j}.$$

**E X E M P L E**

**Soient $\alpha$ et $\beta$ des réels. Effectuons la matrice combinaison linéaire $\alpha A + \beta B$ :**

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{pmatrix}.$$

On a

$$C = \alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' & \alpha c + \beta c' \\ \alpha d + \beta d' & \alpha e + \beta e' & \alpha f + \beta f' \end{pmatrix}.$$

**Exercices**

Soient $\alpha$ et $\beta$ des réels. Dans chacun des cas suivants, trouver (quand c'est possible) la matrice combinaison linéaire $\alpha A + \beta B$.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 4 & 11 & -7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 2 & -5 & 8 \\ x & y & z \end{pmatrix};$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 8 \\ x & z \end{pmatrix};$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 2 & -5 & 8 \\ x & y & z \end{pmatrix}.$

## 1.3 Comment effectuer un produit de matrices ?

Pour pouvoir effectuer le produit de la matrice $A$ par la matrice $B$ dans cet ordre et on note $A \times B$ ou $AB$, il faut d'abord que le nombre de colonnes de la matrice $A$ soit égal au nombre de lignes de la matrice $B$. Notons "$l$" ce nombre commun. Si $P = A \times B$ désigne cette matrice produit, les éléments de la matrice $P$ sont obtenus comme suit :

$$p_{i,j} = \sum_{k=1}^{k=l} (a_{i,k} \times b_{k,j}).$$

**E X E M P L E**

**Dans ce qui suit, effectuons le produit de la matrice $A$ par la matrice $B$ :**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

On utilise le schéma suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = B \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \end{pmatrix} = A \times B \end{array}$$

$p_{i,j}$ : étant la somme des produits terme à terme de la $i^{\text{ième}}$ ligne de la matrice $A$ par la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $B$. On a

$$P = A \times B = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + b\alpha & ay + b\beta & az + b\gamma \\ cx + d\alpha & cy + d\beta & cz + d\gamma \end{pmatrix}.$$

**Exercices**

Dans chacun des cas suivants, trouver (quand c'est possible) le produit de la matrice $A$ par la matrice $B$.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 4 & 11 & -7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 2 & -5 & 8 \\ x & y & z \end{pmatrix};$

(*) Pour la suite des exercices, se reporter à la page 109.

## 1.4 Comment montrer qu'une matrice carrée est inversible ?

Pour montrer qu'une matrice carrée $A$ d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est inversible, on cherche une matrice carrée $B$ du même ordre telle que

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

$I_n$ étant la matrice identité.
Une telle matrice $B$ est *unique* et est appelée matrice *inverse* de $A$.

**E X E M P L E**

**Montrons que la matrice** $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ **est inversible.**

Cherchons une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que

$$A \times B = B \times A = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme $A \times B = \begin{pmatrix} a + c\sqrt{3} & b + d\sqrt{3} \\ c - a\sqrt{3} & b - d\sqrt{3} \end{pmatrix}$, on doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} a + c\sqrt{3} & = 1 \qquad (1) \\ b + d\sqrt{3} & = 0 \qquad (2) \\ c - a\sqrt{3} & = 0 \qquad (3) \\ d - b\sqrt{3} & = 1 \qquad (4) \end{cases}$$

Avec les équations (1) et (3), on obtient $a = \dfrac{1}{4}$ et $c = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ et avec les équations (2) et (4), on obtient $b = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ et $d = \dfrac{1}{4}$. Ensuite, on vérifie que la matrice : $B = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} & -\dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$ satisfait bien : $A \times B = B \times A = I_2$.

Par conséquent, $A$ est inversible et son inverse est la matrice $B$.

**Exercices**

Voir page 109.

## 1.5 Comment montrer qu'une matrice d'ordre 2 est inversible et écrire sa matrice inverse ?

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. Pour montrer que $A$ est inversible, on doit calculer $\det(A) = ad - bc$ et on distinguera deux cas :
• Si $\det(A) = ad - bc = 0$, alors $A$ n'est pas inversible.
• Si $\det(A) = ad - bc \neq 0$, alors $A$ est inversible et sa matrice inverse est la matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**E X E M P L E**

**Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Montrons que $A$ est inversible et calculons son inverse.**

Comme $\det(A) = 1 \times 4 - 3 \times 2 = 4 - 6 = -2 \neq 0$, donc $A$ est inversible. L'inverse de la matrice $A$ est la matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

**Exercices**

Montrer que chacune des matrices suivantes est inversible et déterminer leurs inverses.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ ;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ;

3) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ ;

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ;

5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ ;

6) $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}$.

## 1.6 Comment résoudre un système linéaire à l'aide des matrices ?

Pour résoudre le système linéaire $(S)$ :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y & = & c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y & = & c_2 \end{cases}$$

On calcule $\Delta = \det(S) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

1) Si $\Delta \neq 0$, le système est de Cramer, la solution est donnée par :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

2) Le cas $\Delta = 0$ est traité dans l'exemple ci-après.

**E X E M P L E**

**Soient $a$ et $c$ des réels. Résolvons le système linéaire $(S)$ :**

$$\begin{cases} x + y & = & 1 \\ x + ay & = & c \end{cases}$$

Le déterminant du système $(S)$ est $\Delta = \det(S) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1$.

1) Si $a \neq 1$, alors $\Delta \neq 0$ et par suite la solution est donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & a \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a-c}{a-1} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & c \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{c-1}{a-1}$$

2) Si $a = 1$, le système devient

$$\begin{cases} x + y & = & 1 \\ x + y & = & c \end{cases}$$

Deux cas sont à envisager :

i) $c \neq 1$, le système n'a pas de solutions.

ii) $c = 1$, le système a une infinité de solutions. Notons $\mathcal{S}$ cet ensemble de solutions. On a $\mathcal{S} = \{(x, 1-x), x \in \mathbb{R}\}$

**Exercices**

Voir page 110.

## 1.7 Comment calculer les puissances d'une matrice carrée par diagonalisation ?

Dans cette méthode, on se limite au cas où l'ordre de la matrice est $n = 2$. Soit donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

Pour calculer les puissances de la matrice $A$, on commence d'abord par trouver deux nombres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ et une matrice inversible $P$ telles que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Pour tout entier naturel $n$, on a : $A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$.

- $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont les solutions de l'équation : $x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0$.

**E X E M P L E**

**Soit** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. **Calculons** $A^n$ **pour** $n \in \mathbb{N}^*$.

On résout l'équation $x^2 - (1+2)x + (1 \times 2 - 3 \times 2) = 0$, on trouve $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 4$. Ces deux valeurs sont appelées valeurs propres de la matrice $A$ et comme elles sont distinctes, donc $A$ est dite diagonalisable. Pour trouver la première (resp. deuxième) colonne de la matrice $P$, on cherche une solution non identiquement nulle du système matriciel

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \left(\text{resp.} \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

On trouve par exemple $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et d'après ce qui précède, on a

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Puis, d'après 1.5, on trouve $P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

on a : $A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3(-1)^n + 2 \times 4^n & 2(-1)^{n+1} + 2 \times 4^n \\ 3(-1)^{n+1} + 3 \times 4^n & 2(-1)^n + 3 \times 4^n \end{pmatrix}$.

**Exercices**

Voir page 110.

# Chapitre 2

# Combinatoire et probabilités

2.1 Dans quel cas, peut-on utiliser le nombre d'applications entre deux ensembles finis (ou $p-$liste) ?

2.2 Dans quel cas, peut-on utiliser le nombre d'arrangements de $p$ objets parmi $n$ objets ?

2.3 Dans quel cas, peut-on utiliser le nombre de permutations de $n$ objets ?

2.4 Dans quel cas, peut-on utiliser le nombre de parties de $p$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments ?

2.5 Comment définir une probabilité sur un ensemble dénombrable (fini ou infini) ?

2.6 Comment utiliser la probabilité d'un événement $B$ sachant (ou conditionné par) un événement $A$ de probabilité non nulle ?

2.7 Comment montrer l'indépendance de deux événements d'un espace probabilisé ?

2.8 Comment utiliser la formule des probabilités totales et la formule de Bayes ?

2.9 Comment déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète ?

2.10 Comment déterminer l'espérance d'une variable aléatoire discrète ?

2.11 Comment déterminer la variance (écart-type) d'une variable aléatoire discrète ?

## 2.1 Dans quel cas peut-on utiliser le nombre d'applications entre deux ensembles finis (ou $p$–liste) ?

On utilise le nombre d'applications d'un ensemble à $p$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments ou une $p-$liste lorsqu'il s'agit de faire un choix ordonné de $p$ éléments d'un ensemble fini à $n$ éléments.
Ce nombre est : $n^p$

**E X E M P L E**

**Combien de nombres de 3 chiffres peut-on former ?**

Il s'agit donc de choisir le chiffre des centaines, le chiffre des dizaines et le chiffres des unités. Ce qui revient à faire un choix ordonné de 3 éléments dans un ensemble à 10 éléments, à savoir $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Ce nombre est donc : $10^3$.

**Exercices**

1) Combien existe-t-il de nombres entiers naturels ayant exactement trois chiffres tous impairs ?

   Comparer ce résultat avec le nombre total de nombres entiers de trois chiffres ;

2) Combien existe-t-il de nombres entiers naturels ayant exactement quatre chiffres tous impairs ?

   Comparer ce résultat avec le nombre total de nombres entiers de quatre chiffres ;

3) Combien y a-t-il d'entiers naturels compris entre 1 et 9999 ne contenant pas le chiffre 0 ?

4) Le questionnaire d'une enquête comporte 10 questions. À chacune d'elles, on peut répondre soit par OUI, soit par NON, soit s'abstenir.

   Quel est le nombre de fiches-réponses différentes possibles ?

5) Un cadenas à combinaison est composé de 4 chiffres de 0 à 9. Combien de combinaisons possibles y a-t-il ?

6) Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2\}$. Combien d'applications différentes de $A$ dans $B$ sont possibles ?

   Décrire ces applications.

## 2.2 Dans quel cas peut-on utiliser le nombre d'arrangements de *p* objets parmi *n* objets ?

On utilise le nombre d'arrangements de $p$ objets parmi $n$ objets, lorsqu'il s'agit de faire un choix ordonné de $p$ éléments parmi $n$ éléments (comme dans une $p-$liste), mais *deux à deux distincts.* Ce nombre est noté $A_n^p$ et vaut

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Par convention, on pose $A_n^p = 0$ pour tout $p > n$.

**E X E M P L E**

**Trois personnes arrivent dans un compartiment de chemin de fer de 8 places. De combien de façons peuvent-elles se disposer ?**

Comme on doit associer à chaque personne une place, et à deux personnes distinctes, des places distinctes, il s'agit donc de faire un choix ordonné de 3 places distinctes parmi 8 places. Ce nombre est donc : $A_8^3$ et vaut $A_8^3 = \dfrac{8!}{(8-3)!} = 336$ possibilités.

**Exercices**

1) Combien y a-t-il de nombres de 3 chiffres écrits avec 3 chiffres deux à deux distincts ?
2) Combien de façons différentes peut-on organiser les lettres du mot "MATH" ?
3) Combien de façons différentes, 5 livres peuvent-ils être disposés sur une étagère ?
4) Combien de façons différentes peut-on organiser les lettres du mot "COACH" ?
5) Vous avez 3 chapeaux (A, B, C) et 4 écharpes (X, Y, Z, W). De combien de façons différentes pouvez-vous assortir un chapeau à une écharpe ?
6) Un mot de passe est créé en utilisant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Combien de mots de passe différents peuvent être formés en utilisant exactement 4 chiffres (sans répétition) ?

## 2.3 Dans quel cas peut-on utiliser le nombre de permutations de $n$ objets ?

On utilise le nombre de permutations de $n$ objets, lorsqu'il s'agit de faire un liste ordonnée d'un ensemble à $n$ éléments.
Ce nombre est : $n!$
Par convention, on note $0! = 1$.

**E X E M P L E**

**De combien de façons peut-on répartir 6 postes de travail entre 6 ouvriers ?**

Il s'agit de faire un liste ordonnée d'un ensemble à 6 éléments et chaque ouvrier prend un poste de travail.
Ce nombre vaut : $6! = 720$.

**Exercices**

1) Combien de nombres de 9 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$ ?
   a) Combien parmi ces nombres sont tels que les chiffres $1; 2; 3$ se suivent ?
   b) Combien parmi ces nombres sont tels que les chiffres $1; 2; 3$ sont ensemble dans un ordre quelconque ?
2) Combien de façons différentes peut-on organiser les lettres du mot "MATH" ?
3) Trouver le nombre d'anagrammes du mot "NOEL" ;
4) Trouver le nombre d'anagrammes du mot "LENTILLE" ;
5) Combien de permutations différentes peuvent être formées avec les lettres du mot "ABCDE" ?
6) Vous avez 7 billes de couleurs différentes. Combien de façons différentes pouvez-vous les aligner sur une ligne ?
7) Dans un groupe de 6 personnes, combien de façons différentes peuvent-elles être arrangées pour une photo ?

## 2.4 Dans quel cas peut-on utiliser le nombre de parties de $p$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments ?

On utilise le nombre de parties de $p$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments, ou combinaison à $p$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments, lorsqu'il s'agit de faire un choix **non** ordonné de $p$ éléments deux à deux distincts d'un ensemble à $n$ éléments. Ce nombre est noté $\binom{n}{p}$ et vaut

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Par convention, on pose $\binom{n}{p} = 0$ pour tout $p > n$.

**EXEMPLE**

**Vous disposez de 8 boules numérotées de 1 à 8. De combien de façons différentes pouvez-vous choisir 4 boules sans les remettre ?**

C'est un problème de combinaisons. Le nombre de façons de choisir 4 boules parmi 8 est donné par : $\binom{8}{4} = \dfrac{8!}{4! \times 4!} = 70$.

**Exercices**

1) Une boîte contient 5 billes numérotées de 1 à 5. Combien de façons différentes peut-on choisir 3 billes sans remise ?
2) Vous avez 6 amis et vous voulez les inviter à dîner. Cependant, vous n'avez qu'une petite table avec 4 places. De combien de façons différentes pouvez-vous choisir 4 amis pour les inviter ?
3) Dans un groupe de 8 personnes, combien de comités différents de 3 personnes peuvent être formés ?
4) De combien de façons peut-on garer six voitures dans dix places de parking numérotées de 1 à 10 ?
5) Dans un jeu de cartes standard, combien de façons différentes pouvez-vous choisir une main de 5 cartes ?
6) Vous avez 10 personnes et vous souhaitez former une équipe de travail de 4 personnes. Combien de façons différentes pouvez-vous choisir l'équipe ?

## 2.5 Comment définir une probabilité sur un ensemble dénombrable (fini ou infini) ?

Soit $E$ un ensemble dénombrable (fini ou infini). Pour définir une probabilité sur $E$, on procède comme suit :

• Si $E$ est fini, notons $n$ le nombre d'éléments de $E$. Alors toute suite finie $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ de nombres positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ définit une probabilité sur $E$.

• Si $E$ est infini. Alors toute suite finie $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs tels que $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ définit une probabilité sur $E$.

**E X E M P L E**

**Lorsqu'on prélève au hasard une boule dans une urne contenant 3 boules rouges, une boule jaune et deux boules bleues. Notons $E$ l'ensemble des résultats de ce tirage, on a : $E = \{R, J, B\}$. Définir une probabilité sur $E$.**

Notre intuition nous conduit à poser

$$p_R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad p_J = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad p_B = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

On a : $p_R + p_J + p_B = 1$.

**Exercices**

1) On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. L'ensemble des issues est

$$E = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$$

Définir une probabilité sur $E$.

2) On lance deux fois de suite une pièce de monnaie non équilibrée. L'ensemble des issues est

$$E = \{PP, PF, FP, FF\}$$

Définir une probabilité sur $E$.

3) On lance un dé non équilibré. L'ensemble des issues est

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Définir une probabilité sur $E$.

## 2.6 Comment utiliser la probabilité d'un événement $B$ sachant (ou conditionné par) un événement $A$ de probabilité non nulle ?

Soit $A$ un événement de probabilité non nulle. La probabilité d'un événement $B$ sachant l'événement $A$ notée $\mathbb{P}_A(B)$ ou $\mathbb{P}(B|A)$ est utilisée pour calculer la probabilité de $(A \cap B)$ selon la formule suivante

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B|A)$$

**E X E M P L E**

**Soit une urne contenant 5 boules rouges et 3 boules jaunes, indiscernables au toucher. On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de cette urne. Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?**

Considérons les événements "$A$ une boule rouge en premier" et "$B$ une boule rouge en second". Il s'agit de calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$.
Calculons d'abord $\mathbb{P}(B|A)$.
Comme $\mathbb{P}(B|A)$ est la probabilité de tirer une boule rouge dans l'urne qui ne contient plus que 4 boules rouges et 3 boules jaunes. On a donc $\mathbb{P}(B|A) = \frac{4}{7}$.

Par ailleurs, il est clair que $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{8}$. Il s'ensuit donc que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B|A) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}.$$

**Exercices**

1) Soit une urne contenant 5 boules rouges, 3 boules jaunes et 2 boules vertes, indiscernables au toucher. On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de cette urne.
   a) Quelle est la probabilité de tirer deux rouges ?
   b) Quelle est la probabilité de tirer deux jaunes ?
   c) Quelle est la probabilité de tirer deux vertes ?

*) Pour des exercices complémentaires, se reporter page : 108.

## 2.7 Comment montrer l'indépendance de deux événements d'un espace probabilisé ?

Dans un espace probabilisé $\Omega$, montrer que deux événements $A$ et $B$ sont indépendants, revient à montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

**E X E M P L E**

**Une carte est tirée au hasard dans un jeu de 32 cartes. Les événements "la carte tirée est noire" et "la carte tirée est un roi" sont deux événements indépendants.**

Soient $N$ l'événement "la carte tirée est noire" et $R$ l'événement "la carte tirée est un roi". L'événement $N \cap R$ est "la carte tirée est à la fois un roi et noire". On a

$$\mathbb{P}(N) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(R) = \frac{4}{32} \text{ et } \mathbb{P}(N \cap R) = \frac{2}{32}.$$

Il est bien clair que

$$\mathbb{P}(N \cap R) = \mathbb{P}(N) \times \mathbb{P}(R)$$

Donc les événements "la carte tirée est noire" et "la carte tirée est un roi" sont indépendants.

**Exercices**

1) On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements $A$ "la carte tirée est un roi" et $B$ "la carte tirée est un pique."
   a) Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$ ;
   b) Les événements $A$ et $B$ sont-ils indépendants ?
2) Soient $A$ et $B$ deux événements indépendants d'un univers $\Omega$.
   a) On a $\mathbb{P}(A) = 0,2$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,06$.
   Calculer $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$ ;
   b) On a maintenant $\mathbb{P}(A) = 0,4$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,52$.
   Calculer $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$ ;
3) Jean fait successivement une partie de tennis de table et une partie de badminton. La probabilité qu'il gagne au tennis de table est $0,7$ et quel que soit le résultat du match précédent, la probabilité qu'il gagne au badminton est $0,4$. Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?

## 2.8 Comment utiliser la formule des probabilités totales et la formule de Bayes ?

Soient $B_1, B_2, \ldots, B_n$, $n$ événements constituant une partition d'un espace probabilisé $\Omega$. La formule des probabilités totales permet d'exprimer la probabilité de tout événement $A$ en fonction des probabilités $\mathbb{P}\left(A \cap B_i\right)$ ou encore en fonction des $\mathbb{P}\left(A|B_i\right)$ et des $\mathbb{P}(B_i)$. On a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(A \cap B_1\right) + \ldots + \mathbb{P}\left(A \cap B_n\right)$$

Ou encore

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(A|B_1\right)\mathbb{P}(B_1) + \ldots + \mathbb{P}\left(A|B_n\right)\mathbb{P}(B_n)$$

Soient $A$ et $B$ deux événements de probabilités non nulles d'un espace probabilisé $\Omega$. La formule de Bayes permet d'exprimer la probabilité $\mathbb{P}\left(B|A\right)$ en fonction des probabilités $\mathbb{P}\left(A|B_i\right)$, $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B_i)$. On a

$$\mathbb{P}\left(B|A\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A|B\right)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}\left(A|B\right)\mathbb{P}(B)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(A|B_i\right)\mathbb{P}(B_i)}$$

**E X E M P L E**

**Le personnel d'une entreprise est composé de 60% de femmes. 15% de femmes fument et 25% des hommes fument. Calculons la proportion des fumeurs dans cette entreprise ?** Considérons les événements suivants : $B_1$ "l'employé est une femme" $B_2$ "l'employé est un homme" et $F$ "l'employé est un fumeur ou une fumeuse". L'énoncé se traduit par les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(B_1) = 0.6,\ \mathbb{P}\left(F|B_1\right) = 0.15 \text{ et } \mathbb{P}\left(F|B_2\right) = 0.25$$

Calculons $\mathbb{P}(F)$. On a

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(F) & = & \mathbb{P}(F \cap B_1) + \mathbb{P}(F \cap B_2) \\ & = & \mathbb{P}(F|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(F|B_2)\mathbb{P}(B_2) \\ & = & 0.15 \times 0.6 + 0.25 \times 0.4 \\ & = & 0.19 \end{array}$$

La proportion des fumeurs dans cette entreprise est de 19%.

**Exercices**

Voir page : 111.

## 2.9 Comment déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète ?

Soient $\Omega$ un ensemble dénombrable (fini ou infini) muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ et $X$ une variable aléatoire discrète définie sur $\Omega$, c'est-à-dire une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $X$ prend les valeurs $x_i$ avec $i$ décrit un ensemble dénombrable $I$.

Déterminer la loi de probabilité de $X$ revient à déterminer les probabilités :

$$p_i = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}\right) = \mathbb{P}\left(X = x_i\right).$$

**E X E M P L E**

**On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2€ pour chaque résultat "Pile" et on perd 1€ pour chaque résultat "Face". L'ensemble des issues est**

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}.$$

**Soit $X$ l'application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ qui à chaque issue associe le gain correspondant. Déterminer la loi de $X$.**

Il est clair que les valeurs prises par $X$ sont "$-3;\ 0;\ 3$ et $6$".
Calculons $\mathbb{P}(X = -3)$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 3)$ et $\mathbb{P}(X = 6)$. On a :

$$\mathbb{P}(X = -3) = \mathbb{P}(\{FFF\}) = \frac{1}{8}$$
$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{PFF, FPF, PFF\}) = \frac{3}{8}$$
$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(\{PPF, PFP, FPP\}) = \frac{3}{8}$$
$$\mathbb{P}(X = 6) = \mathbb{P}(\{FFF\}) = \frac{1}{8}$$

| gain $x_i$ | $x_1 = -3$ | $x_2 = 0$ | $x_3 = 0$ | $x_4 = 6$ |
|---|---|---|---|---|
| Probabilité $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

**Exercices**

Voir page 112.

## 2.10 Comment déterminer l'espérance d'une variable aléatoire discrète ?

Soient $\Omega$ un ensemble dénombrable (fini ou infini) muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ et $X$ une variable aléatoire discrète définie sur $\Omega$. Notons par $\{x_i, i \in I\}$, l'ensemble des valeurs prises par $X$.

Pour déterminer l'espérance de $X$, qu'on note $\mathbb{E}(X)$, on doit calculer la quantité (quand elle existe) :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in I} x_i \times \mathbb{P}\left(X = x_i\right).$$

**E X E M P L E**

**On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2€ pour chaque résultat "Pile" et on perd 1€ pour chaque résultat "Face". L'ensemble des issues est**

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}.$$

**Soit $X$ l'application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ qui à chaque issue associe le gain correspondant. Déterminer l'espérance de $X$.**

Dans l'exemple de la méthode précédente, les valeurs prises par $X$ sont "$-3$; $0$; $3$ et $6$" et les probabilités correspondantes sont :

$\mathbb{P}\left(X = -3\right) = \frac{1}{8}$, $\mathbb{P}\left(X = 0\right) = \frac{3}{8}$, $\mathbb{P}\left(X = 3\right) = \frac{3}{8}$ et $\mathbb{P}\left(X = 6\right) = \frac{1}{8}$

L'espérance de $X$ est donc

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in I} x_i \times \mathbb{P}\left(X = x_i\right) = -3\times\frac{1}{8}+0\times\frac{3}{8}+3\times\frac{3}{8}+6\times\frac{1}{8} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Ceci représente le gain moyen.

**Exercices**

1) Soit $X$ une variable aléatoire prenant les valeurs $1, 2, 3, 4, 5, 6$ avec les probabilités suivantes

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |

Calculer l'espérance de $X$.

*) Pour des exercices complémentaires, se reporter page : 112.

## 2.11 Comment déterminer la variance (écart-type) d'une variable aléatoire discrète ?

Soient $\Omega$ un ensemble dénombrable (fini ou infini) muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ et $X$ une variable aléatoire discrète définie sur $\Omega$. Notons par $\{x_i, i \in I\}$, l'ensemble des valeurs prises par $X$.
Pour déterminer la variance de $X$, qu'on note $\mathbb{V}(X)$, on doit calculer la quantité (quand elle existe) :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i \in I} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \times \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$$

L'écart-type de $X$ est $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.
**E X E M P L E**
**On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2€ pour chaque résultat "Pile" et on perd 1€ pour chaque résultat "Face". L'ensemble des issues est**

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}.$$

**Soit $X$ l'application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ qui à chaque issue associe le gain correspondant. Déterminer la variance et l'écart-type de $X$.**
Dans l'exemple de la méthode 9, les valeurs prises par $X$ sont "$-3$; $0$; $3$ et $6$" et les probabilités correspondantes sont :

$$\mathbb{P}(X = -3) = \frac{1}{8}, \mathbb{P}(X = 0) = \frac{3}{8}, \mathbb{P}(X = 3) = \frac{3}{8} \text{ et } \mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{8}$$

Dans l'exemple de la méthode 10, l'espérance de $X$ est $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$. La variance de $X$ est donc :

$$\mathbb{V}(X) = -3 \times \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{2}\right)^2 + 0 \times \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{2}\right)^2 + 6 \times \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{2}\right)^2.$$

Soit $\mathbb{V}(X) = 9,46875$.
L'écart-type de $X$ est $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} \simeq 3,08$

**Exercices**

1) Soit $X$ une variable aléatoire prenant les valeurs $1, 2, 3, 4, 5, 6$ avec les probabilités suivantes

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 0,1 | 0,2 |

Calculer la variance et l'écart-type de $X$.

*) Pour des exercices complémentaires, se reporter page : 113.

# Chapitre 3

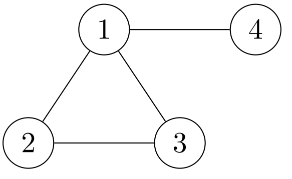
# Graphes

## 3.1 Comment construire une matrice d'adjacence ?

Soit $G$ un graphe non orienté avec $n$ sommets numérotés de 1 à $n$, la matrice d'adjacence $A = (A_{ij})$ est construite comme suit :
$A_{ij}$ est égal à 1 si les sommets $i$ et $j$ sont reliés par une arête, et 0 sinon.

**E X E M P L E**

**Considérons le graphe $G$ ci-dessous :**



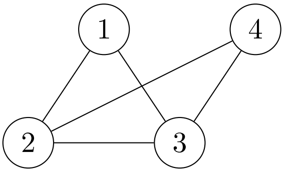

**Donnons la matrice d'adjacence du graphe $G$.**

Définissons la suite $(A_{ij})_{1\leq i,j\leq 4}$ comme suit :
$A_{1,2} = A_{1,3} = A_{1,4} = 1$ (le sommet 1 est relié aux sommets 2, 3 et 4) ;
$A_{2,1} = A_{2,3} = 1$ (le sommet 2 est relié aux sommets 1 et 3) ;
$A_{3,1} = A_{3,2} = 1$ (le sommet 3 est relié aux sommets 1 et 2) ;
$A_{4,1} = 1$ (le sommet 4 est relié au sommet 1) ;
Les autres $A_{ij} = 0$.

La matrice d'adjacence $A$ est $A = (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercices**

1) Considérons le graphe $G$ ci-dessous :




Donner la matrice d'adjacence du graphe $G$ ;

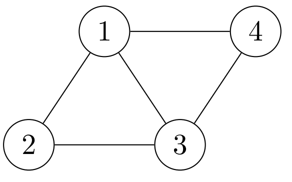
*) Pour des exercices complémentaires, se reporter page : 114.

## 3.2 Comment calculer le nombre de chaînes d'une longueur donnée d'un sommet à un autre ?

Soit $G$ un graphe non orienté avec $n$ sommets numérotés de 1 à $n$ et soit $A$ sa matrice d'adjacence. Soient $k$ un entier non nul, $i$ et $j$ deux sommets du graphe $G$.
Le nombre de chaînes de longueur $k$ reliant le sommet $i$ et le sommet $j$ est égal au coefficient de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice $A^k$.

**E X E M P L E**

**Considérons le graphe $G$ ci-dessous :**




**Donnons le nombre de chaînes de longueur 2 et de longueur 3 reliant le sommet 1 et le sommet 3.**

La matrice d'adjacence $A$ de $G$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \underline{2} & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ \underline{2} & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Il y a deux chaînes de longueur 2 reliant le sommet 1 et le sommet 3 : ce sont $1-2-3$ et $1-4-3$.

La matrice $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & \underline{5} & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \\ \underline{5} & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Il y a cinq chaînes de longueur 3 reliant le sommet 1 et le sommet 3 : ce sont $1-3-1-3$, $1-3-2-3$, $1-3-4-3$ $1-4-1-3$, et $1-2-1-3$.

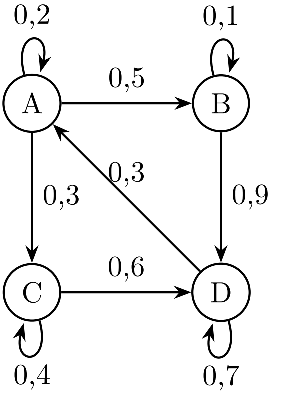
**Exercices**

Voir page 114.

## 3.3 Comment reconnaître un graphe probabiliste ?

Un graphe probabiliste est un graphe orienté pondéré dans lequel la somme des poids des arcs issus de chaque sommet est égal à 1.

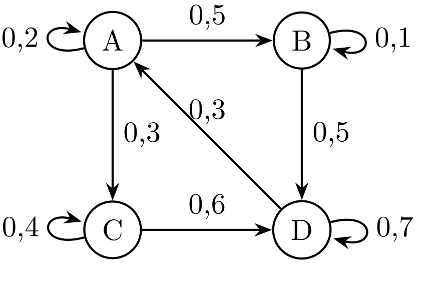
**E X E M P L E**
**Vérifions que le graphe ci-dessous est un graphe probabiliste**




Comme ce graphe est orienté, il suffit de vérifier que la somme des poids des arcs issus de chaque sommet est égal à 1.
Poids des arcs issus du sommet $A$ ont pour somme : $0,2+0,5+0,3=1$
Poids des arcs issus du sommet $B$ ont pour somme : $0,1+0,9=1$
Poids des arcs issus du sommet $C$ ont pour somme : $0,4+0,6=1$
Poids des arcs issus du sommet $D$ ont pour somme : $0,7+0,3=1$.

**Exercices**

1) Le graphe ci-après est-il un graphe probabiliste ?



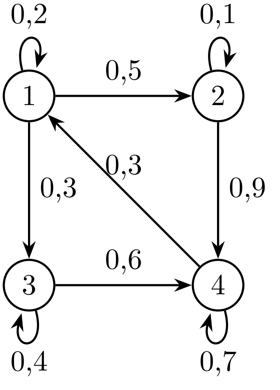

2) Voir page : 115.

## 3.4 Comment écrire la matrice de transition d'un graphe probabiliste ?

Soit $n$ un entier naturel non nul. La matrice de transition associée à un graphe probabiliste de rang $n$ (à $n$ sommets) est la matrice carrée $T = (t_{i,j})$ d'ordre $n$ où $t_{i,j}$ est le poids de l'arc allant du sommet $i$ au sommet $j$.
On pose $t_{i,j} = 0$ s'il n'y pas d'arc allant du sommet $i$ au sommet $j$.

**E X E M P L E**

**Déterminons la matrice de transition du graphe probabiliste suivant**




La matrice de transition de ce graphe est

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0,7 \end{pmatrix}$$

**Exercices**

Voir page : 115.

## 3.5 Comment obtenir la distribution à l'étape *n* en fonction de la distribution initiale dans le cas d'une chaîne de Markov à deux ou à trois états ?

Soient $T$ la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)$ à deux ou à trois états, $n$ un entier naturel non nul, $\pi_0$ la distribution initiale de $(X_n)$ et $\pi_n$ la distribution à l'étape $n$. Alors $\pi_n$ est déterminée par

$$\pi_n = \pi_0 \, T^n$$

**E X E M P L E**

**Considérons $(X_n)$ une chaîne de Markov à deux états $a$ et $b$ définie par sa matrice de transition $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.**

**Soit $\pi_0 = (0,3 \quad 0,7)$ la distribution initiale de $(X_n)$. Calculons la distribution à l'étape $10$ de $(X_n)$.**

Nous devons calculer la matrice $T^n$. Pour cela, nous reprenons la méthode 1.7 du chapitre "Calcul matriciel" en ne donnant ici que les résultats du calcul.
La résolution de l'équation $x^2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) x + \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}\right) = 0$, donne $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -\frac{4}{15}$. On a $\lambda_1 \neq \lambda_2$, donc $T$ est dite diagonalisable.
Comme matrice $P$, on trouve par exemple $P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{10}{9} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $P^{-1}$, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{19} & \frac{10}{19} \\ -\frac{9}{15} & \frac{9}{19} \end{pmatrix}$ et d'après cette même méthode, on a : $T = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{15} \end{pmatrix} P^{-1}$. Puis, $T^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{4}{15}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1}$.

Le calcul de $\pi_{10} = (0,3 \quad 0,7) T^{10}$ est laissé au lecteur.

**Exercices**

Voir page : 116.

## 3.6 Comment trouver l'état stable d'une chaîne de Markov ?

Soit $T$ la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)$ à deux ou à trois états. Il existe au moins une distribution initiale telle que $\pi_0 = \pi_0 T$. Cette distribution est dite état stable de la chaîne de Markov $(X_n)$. Pour trouver cet état : selon le cas, on résout l'équation matricielle

$$(\alpha \quad \beta) = (\alpha \quad \beta)T \quad \text{ou} \quad (\alpha \quad \beta \quad \gamma) = (\alpha \quad \beta \quad \gamma)T.$$

**E X E M P L E**

**Soit $(X_n)$ la chaîne de Markov à deux états définie par sa matrice de transition $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.**

**Déterminons un état stable de cette chaîne de Markov.**

On résout l'équation matricielle $(\alpha \quad \beta) = (\alpha \quad \beta)T$. Ce qui revient à résoudre le système linéaire à deux inconnues suivants :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\alpha + \frac{3}{5}\beta & = & \alpha \\ \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\beta & = & \beta \\ \alpha + \beta & = & 1 \\ \alpha, \quad \beta & \geq & 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent successivement à

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}\alpha + \frac{3}{5}\beta & = & 0 \\ \frac{2}{3}\alpha - \frac{3}{5}\beta & = & 0 \\ \alpha & = & 1-\beta \\ \alpha, \beta & \geq & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3}(1-\beta) + \frac{3}{5}\beta & = & 0 \\ \alpha & = & 1-\beta \\ \alpha, \quad \beta & \geq & 0 \end{cases}$$

On trouve $\beta = \frac{9}{19}$ puis $\alpha = \frac{10}{19}$. Un état stable est donc l'état initial $\pi_0 = \begin{pmatrix} \frac{10}{19} & \frac{9}{19} \end{pmatrix}$.

**Exercices**

Voir page 116.

# Chapitre 4

# Nombres complexes

## 4.1 Comment calculer le module et l'argument d'une puissance d'un nombre complexe ?

Pour calculer le module et l'argument d'une puissance d'un nombre complexe, on calcule d'abord le module et l'argument de ce nombre, puis on l'élève à la puissance voulue.

**E X E M P L E**

**Calculer le module et l'argument du nombre complexe du nombre complexe : $z = (1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{20}$.**

Comme

$$(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = 2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

donc

$$\left|1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = 2 \text{ et } \arg(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

d'où

$$z = (1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{20} = \left(2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^{20} = (2)^{20}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{20\pi}{3}}$$

ou encore

$$z = 2^{20}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(18+2)}{3}\pi} = 2^{20}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$$

et par suite

$$|z| = \left|(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{20}\right| = 2^{20} \text{ et } \arg(z) = \frac{2\pi}{3}[2\pi].$$

**Exercices**

Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants :

a) $(-1+\mathrm{i})^4$ ;

b) $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^3$ ;

c) $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right)^5$ ;

d) $\left(\dfrac{4}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^7$.